Topologie Algébrique TD 3

21 Octobre 2011

3 Homotopie

3.1 Théorie élémentaire

Exercice 3.1 1. Montrer que l'inclusion $\mathbb{S}^n \to \mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ est une équivalence d'homotopie.

2. Est-ce que $\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$? Pourquoi ? Et pour les dimensions supérieures ?

Exercice 3.2 Soient X, Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $h : Y \to X$ trois applications continues. Si on a des homotopies $f \circ g \sim \mathbf{id}_Y$ et $h \circ f \sim \mathbf{id}_X$, montrer que f est une équivalence d'homotopie, et $g \sim h$. Plus généralement, si on suppose seulement que $f \circ g$ et $h \circ f$ sont des équivalences d'homotopie, montrer que f, g, h sont tous des équivalences d'homotopie.

Exercice 3.3 (Rétractes) On va comparer les trois notions : *rétracte*, *rétracte par déformation* et *rétracte par déformation forte*.

1. Soit X un espace topologique, $x \in X$ un point. Montrer que x est un rétracte de X. Si X n'est pas connexe par arc, est-il un rétracte par déformation de X ?
2. On note $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbf{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ la boule unité fermée dans $\mathbf{R}^n$, et $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n : ||x|| = 1\}$ son bord. Soit T un sous-espace non-vide de $\mathbb{D}^n$ tel que $T \cap \mathbb{S}^{n-1} = \emptyset$. Montrer que $\mathbb{S}^{n-1}$ est un rétracte de $\mathbb{D}^n\backslash T$. Construire des exemples de rétracte qui n'est pas un rétracte par déformation.
3. **(Le peigne)** Soit $P \subset \mathbf{R}^2$ le sous-espace :

$$I \times \{0\} \cup ((\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}_+\} \cup (\mathbf{Q} \cap (1/2, 1))) \times I)$$

muni de la topologie de sous-espace.
(a) Montrer que P est contractile.
(b) Déterminer la condition pour un point de P d'être un rétracte de P, un rétracte par déformation de P, un rétracte par déformation forte de P respectivement.

Exercice 3.4 Montrer qu'un rétracte d'un espace contractile est contractile.

Exercice 3.5 (Exemples d'équivalences d'homotopie) 1. Soit E est un fibré vectoriel sur X, montrer que X et E sont homotopiquement équivalents.

2. Montrer que le ruban de Möbius et son cercle au milieu sont homotopiquement équivalents.
3. Pour un entier $n \in \mathbf{Z}$, on note S_n le cercle dans $\mathbf{R}^2$ centré à $(n, 0)$ de rayon 1. Montrer que $S_{-1} \cup S_1$, $S_0 \cup ([-1,1] \times \{0\})$ et $S_{-2} \cup ([-1,1] \times \{0\}) \cup S_2$ sont homotopiquement équivalents.
4. Classifier les 26 lettres capitaux par ses types d'homotopie.
5. * Classifier les caractères chinoises par ses types d'homotopie...

3.2 Théorie plus avancée

Exercice 3.6 (Cofibrations) Soit $i : A \to X$ une application continue entre deux espaces topologiques[1]. On dit que i est une *cofibration*, noté $i : A \hookrightarrow X$ ou $i : A \rightarrowtail X$, si elle satisfait la *propriété d'extension d'homotopie* suivante :

(HEP[2]) : Pour tout espace topologique Y, si on a une application continue $f : X \to Y$ et un homotopie $H : A \times I \to Y$ tel que $H|_{A\times 0} = f \circ i$, alors il existe un homotopie $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ tel que $\widetilde{H}|_{X\times 0} = f$ et $\widetilde{H} \circ (i \times \mathrm{id}_I) = H$.

1. Montrer qu'une cofibration est toujours un morphisme injectif d'image fermé. Donc on considère souvent le cas d'une paire d'espace topologique (X, A) constituée d'un espace topologique X et un sous-espace fermé A, on dit qu'une paire est une cofibration, si l'inclusion est une cofibration.
2. Montrer que (X, A) est une cofibration si et seulement si le cylindre
$$Mi := (X \times 0) \cup_A A \times I$$
est un rétracte de $X \times I$.
3. **(Exemple)** Montrer que $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ est une cofibration. En déduire par récurrence que toute paire de CW-complexes est une cofibration.
4. **(Contre-exemple)** $(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}_+\}, I)$ n'est pas une cofibration.
5. **(Push-out)** Soit (X, A) une cofibration, soit $g : A \to Y$ une application continue vers un autre espace topologique, montrer que $(Y \cup_A X, Y)$ est aussi une cofibration.
6. ***(Critère de cofibration)** Une paire d'espaces topologiques (X, A) est une cofibration si et seulement si elle est une *NDR-paire*[3], c'est-à-dire, il existe une fonction continue $u : X \to I$ avec $A = u^{-1}(0)$, et un homotopie $H : X \times I \to X$ satisfait les conditions suivantes :
   - $H|_{X\times 0} = \mathrm{id}_X$;
   - $H|_{A\times I} = pr_A$, la projection sur le premier facteur ;
   - Pour tout $x \in X$ tel que $u(x) < 1$, on a $H(x, 1) \in A$.

1. Tous les espaces topologiques sont toujours supposés séparés.
2. Homotopy Extension Property, ou 'HEP' pour abréger.
3. NDR=Neighborhood Deformation Retract

7. **(Remplacement)** Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Chercher une factorisation de f comme la composition d'une cofibration suivie par une équivalence d'homotopie. Autrement dit, d'un point de vu d'homotopie, on peut remplacer n'importe quel morphisme par une cofibration.

Remarque :
D'après la critère de cofibration, c'est pas une condition très restreinte. On présente deux critères pour l'équivalence d'homotopie, *cf.* Allen Hatcher : *Algebraic Topology* Chapter 0. On va les énoncer dans le cadre de CW-complexes, quoiqu'ils sont valables dans le cas plus général de cofibration [4].

Théorème 3.7 (Critère I : Contraction d'un sous-espace contractile) *Soit (X, A) une paire de CW-complexe, supposons A est contractile, alors l'application quotient $X \to X/A$ est une équivalence d'homotopie.*

Théorème 3.8 (Critère II : Applications d'attachement homotopiques) *Soit (X, A) une parie de CW-complexe, soient $f_0, f_1 : A \to Y$ deux applications homotopiques. Alors $Y \bigcup_{f_0} X$ et $Y \bigcup_{f_1} X$ sont homotopiquement équivalents.*

Exercice 3.9 (Exemples d'équivalences d'homotopie) Expliquer les équivalences d'homotopie suivantes :

1. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité dans $\mathbf{R}^{n+1}$, soient P, Q deux points distincts de $\mathbb{S}^n$. Montrer que les trois espaces topologiques sont homotopiquement équivalents : $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^n \cup [P, Q]$, $\mathbb{S}^n/_{P\sim Q}$.
2. **(Cofibre)** Soit (X, A) une paire de CW-complexe (ou plus généralement une cofibration), montrer que X/A et le cône de l'inclusion $Ci := CA \cup_A X$ sont homotopiquement équivalents. On appelle cet espace à homotopie près *la cofibre* de $A \to X$.
   Remarque : Par le principe de remplacement [5], pour $f : X \to Y$ un morphisme entre deux espaces topologiques, on définit la cofibre de f le cône Cf, qui est aussi le quotient Mf/X.
3. Soit X un espace topologique connexe par arc, soit S un sous-ensemble fini de X, tel que pour tout point $x \in S$, l'inclusion de x dans X est une cofibration (par exemple, X est un CW-complexe). Montrer que le quotient X/S est homotopiquement équivalent à $X \vee \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}_{n-1}$, où n est la cardinalité de S.
4. Soit x un point d'un CW-complexe X, ou plus généralement, (X, x) un espace topologique pointé tel que l'inclusion du point base soit une cofibration. Montrer que la suspension (usuelle) $\mathcal{S}X := \{0\} \times X \backslash X \times I / X \times \{1\}$ est homotopiquement équivalente à la suspension réduite $\Sigma X := \mathbb{S}^1 \wedge X$.

4. Voir l'exercice sur cofibration.
5. Voir l'exercice sur cofibration.

Exercice 3.10 (Groupoïdes) Un *groupoïde* est par définition une catégorie dans laquelle tout morphisme est un isomorphisme. Notons $\mathfrak{Gpd}$ la catégorie des groupoïdes.

1. Construire un foncteur $i : \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Gpd}$;
2. Construire un foncteur $j : \mathfrak{Gp} \to \mathfrak{Gpd}$;
3. Soit $\{\mathscr{G}\}_{i\in I}$ un ensemble de groupoïdes. Montrer que le coproduit des ce famille existe dans la catégorie $\mathfrak{Gpd}$.
4. Soit $\mathscr{G}$ un groupoïde, vérifier que la relation définie par
$$x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{G}}(x, y) \neq \varnothing$$
est une relation d'équivalence sur $\mathsf{Obj}(\mathscr{G})$ et on définit $\pi_0(\mathscr{G}) := \mathsf{Obj}(G)/\sim$. Le groupoïde est *connexe* si $\pi_0(\mathscr{G}) = \{*\}$. En général, montrer qu'il existe une équivalence de groupoïdes :
$$\mathscr{G} \simeq \coprod_{j\in\pi_0(\mathscr{G})} \mathscr{G}_j,$$
où $\mathscr{G}_j$ est connexe (les $\mathscr{G}_j$ sont les composantes connexes de $\mathscr{G}$).
5. Soient $\mathscr{G}$ un groupoïde connexe et $x \in \mathsf{Obj}(\mathscr{G})$. Montrer que l'inclusion $\mathrm{Aut}(x) \hookrightarrow \mathscr{G}$ est une équivalence de groupoïdes, où $\mathrm{Aut}(x)$ est la sous-catégorie pleine à un seule objet x.

Exercice 3.11 (Groupoïdes fondamentaux) Soit X est un espace topologique, on considère la catégorie $\Pi_1(X)$ suivante :
- Les objets : les points de X ;
- Les flèches : pour deux points $x, y \in X$, on définit l'ensemble des morphismes $\mathrm{Mor}(x, y)$ comme l'ensemble des chemins de x à y modulo l'équivalence d'homotopie (relative aux extrémités.)

1. Montrer que $\Pi_1(X)$ est un groupoïde pour X un espace topologique ;
2. Montrer que $\Pi_1 : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Gpd}$ est un foncteur ;
3. On suppose de plus que X est connexe par arcs. Montrer que $\pi_1(X) \to \Pi_1(X)$ est une équivalence de catégories, où on voit le groupe fondamental de X comme un groupoïde à un objet par le foncteur naturel $j : \mathfrak{Gp} \to \mathfrak{Gpd}$.
4. Si X, Y sont deux espaces topologiques homotopiquement équivalents, établir une équivalence de catégories entre $\Pi_1(X)$ et $\Pi_1(Y)$.